Espace de tenseurs et théorie classique des invariants

OLIVE Marc[a], **KOLEV Boris**[a], **AUFRRAY Nicolas**[b]

a. *LATP, CNRS & Université de Provence, 39 Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France*
b. *LMSME, Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle,MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France*

Résumé :

Le propos de cet exposé est de présenter les outils nécessaires à la recherche de bases d'invariants pour l'action classique des groupes O(3) *et* SO(3) *sur des espaces de tenseurs qui interviennent naturellement dans les théories de l'élasticité classique et généralisée. A cet effet, il sera précisé les idées et notions mathématiques importantes permettant d'aboutir à de telles bases. Pour illustrer le propos, la base d'invariants des tenseurs d'ordre 3 complètement symétriques sera calculée pour la première fois. D'un point de vue mécanique ces invariants sont liées au* gradient d'élongation *dans la théorie de l'hyperélasticité du second-gradient. La connaissance de leur base est nécessaire à l'écriture de l'énergie libre d'un milieu hyperélastique isotrope du second gradient.*

Abstract :

The purpose of this presentation is to introduce the main tools used to construct an invariant basis for the classical group action of O(3) *and* SO(3) *on tensor spaces that are naturally involved in classical and generalized elasticity theory. For that end, the main mathematical ideas and notions that lead to such invariant bases will be introduced. As an example of the proposed method, the invariant basis for completely symmetric 3rd-order tensor will be construct. Such a result finds its application in the field of strain-gradient hyperelasticity, as it allows to write a part of the second-order energy potential.*

Mots clefs : **3 maximum : Théorie des invariants ; Hyper-élasticité**

1 Motivations mécaniques

Les invariants ont en mécanique de nombreuses applications. Les principales étant : 1) La reconnaissance d'un *objet géométrique* modulo son orientation, et 2) l'écriture de lois de comportement en grandes transformations. Le premier thème concerne essentiellement l'identification et la reconstruction du tenseur d'élasticité quand celui-ci est exprimé dans une base quelconque, le deuxième est au cœur de l'élasticité en grandes transformations. La mise en œvre de ces techniques présuppose la connaissance d'une base complète d'invariants reliant les différentes quantités considérées dans la modélisation du problème. Et c'est ce point de départ qui constitue une des difficultés de l'approche. Si l'on sait dériver des bases d'invariants pour des familles mixtes de tenseurs d'ordre 1 et 2, à partir de l'ordre 3 les problèmes se compliquent très rapidement. Actuellement peu de résultats sont connus à l'ordre 3 et, comme noté par Boehler et al. [1], une base complète d'invariants n'est pas connue pour le tenseur d'élasticité classique.

L'approche développée dans ce papier propose une méthode de construction de ces bases d'invariants dans certaines situations non triviales. A titre d'exemple, et en vue de l'étude de l'élasticité du second gradient en grande déformation, la base d'intégrité d'un tenseur d'ordre trois complètement symétrique est construite. Un tel tenseur décrit le gradient d'élongation dans la théorie du second gradient.

Plus précisément, en élasticité classique on montre, pour des raisons d'objectivité, que l'énergie libre ψ^I ne dépend que du tenseur de déformation de Green-Lagrange E, et on écrit $\psi^I(E_{(ij)})$, où la notation (..) indique la symétrie par permutation de i et j. Dans le cadre d'un milieu élastique du second

gradient [8], l'énergie dépend également du gradient de la déformation, on a alors $\psi^{II}(E_{(ij)}, E_{(ij),k})$, où $(\mathrm{E} \otimes \nabla)_{(ij)k} = E_{(ij),k}$ est le gradient de E. Il peut être montré que tout tenseur de la forme $E_{(ij),k}$ se décompose en une partie complètement symétrique et un reste :

$$E_{(ij),k} = S_{(ijk)} + \frac{1}{3}\left(\epsilon_{jkl} R_{li} + \epsilon_{ikl} R_{lj}\right)$$

La partie complètement symétrique $S_{(ijk)}$ définie comme :

$$S_{(ijk)} = \frac{1}{3}(E_{(ij),k} + E_{(ki),j} + E_{(jk),i})$$

correspond au *gradient d'élongation* tandis que la partie restante R_{ij} :

$$R_{ij} = \epsilon_{ipq} E_{(jp),q}$$

correspond au *gradient de la rotation*. Cette décomposition étant orthogonale, on peut écrire :

$$\psi^{II}(E_{(ij)}, E_{(ij),k}) = \overline{\psi}^{II}(E_{(ij)}, S_{(ijk)}, R_{ij})$$

Dans le cas où le gradient de la rotation est négligeable, on obtient un milieu à gradient d'élongation dont l'énergie dépend alors seulement de $\mathrm{E}_{(ij)}$ et de $\mathrm{S}_{(ijk)}$. Un corps hyperélastique est isotrope si son énergie libre est une fonction isotrope de ses arguments, c'est-à-dire si $\overline{\psi}^{II}(E_{(ij)}, S_{(ijk)})$ est fonction des invariants de $\mathrm{E}_{(ij)}$ et de $\mathrm{S}_{(ijk)}$.

Nous dériverons, dans cette optique, la base d'invariants de $\mathrm{S}_{(ijk)}$, c'est-à-dire des tenseurs d'ordre 3 complètement symétriques. Mais, avant cela, définissons le cadre mathématique général de ce problème.

2 Contexte mathématique

La notion de **polynômes invariants** est issue d'une vaste théorie mathématique appelée théorie des invariants - théorie ne traitant pas uniquement du cas des polynômes. Boehler et al. [1] ont étudié dans un article de 1994 l'espace des tenseurs d'élasticité (qui apparaît via la loi de Hooke en petites déformations). A cet effet, ils ont exploité certains résultats issus de la **théorie classique des invariants**. Rappelons que cette théorie, datant du début du 19ième siècle, a été initiée par Cayley : le problème était de savoir quand deux courbes données étaient "équivalentes".

Dans le cas de la théorie de l'élasticité, il s'avère que le même type de problème intervient. Une fois donné un tenseur d'élasticité, il existe une action naturelle de SO(3) sur ce tenseur : ce même tenseur pourra donc se présenter sous une infinité de formes. Ainsi, tout comme dans le cas des courbes du plan, il faut étudier, non pas un élément donné, mais son **orbite**. La question est donc de savoir dans quel cas deux éléments donnés sont dans la même orbite ou non. Une façon d'aborder ce problème - qui était la stratégie dominante des mathématiciens du 19ième siècle - consiste à considérer des invariants polynomiaux. Cependant, il faut avant tout s'assurer que cet ensemble de polynômes, qui forme une algèbre, est en quelque sorte "finie" : un nombre fini de polynômes invariants doit être suffisant pour engendrer la totalité de l'algèbre. Une telle famille sera appelée une **base de Hilbert**. Dans le domaine de la théorie classique des invariants, Gordan [2], a démontré en 1868 qu'une telle base existait. Dans certains cas plus généraux, Hilbert [5] a démontré en 1888 le même résultat. Ainsi, dans le cas de l'action des groupes SO(3) et O(3) sur des espaces de tenseurs, nous sommes assurés de toujours pouvoir trouver une base de Hilbert.

Malheureusement, ces résultats ne donnent pas de méthode effective : il faudra faire, dans chaque cas particulier, de longs calculs pour obtenir une telle base de Hilbert. Boehler et al. [1] ont par exemple utilisés certains résultats de Shioda [6] afin d'obtenir une base de Hilbert associée à l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre 4. Quelques autres résultats concernant des tenseurs harmoniques d'ordre 5 ont aussi été obtenus par Popovisciu et Brouwer [4]. Toutefois, en dépit de ces différents travaux, une base complète d'invariants pour le tenseur d'élasticité n'est toujours pas connue actuellement.

Nous essayerons de donner ici le cadre mathématiques nécessaire pour obtenir une base de Hilbert donnée. Pour illustrer ce cadre, nous prendrons le cas des polynômes O(3) invariants sur l'espace des tenseurs [1] $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$, sachant que cet espace de tenseurs est isomorphe à l'espace des tenseurs d'ordre 3 complètement symétrique qui intervient dans la théorie de l'élasticité à gradient.

3 L'algèbre des polynômes invariants

Rappelons avant tout le cadre mathématique et physique dans lequel intervient l'idée de polynômes invariants. Dans la théorie de l'élasticité linéaire du second-gradient de nombreux espaces de tenseurs interviennent, leurs ordres allant de 0 à 6. On notera par la suite $\mathbf{T}^n := \otimes^n \mathbb{R}^3$ l'espace des tenseurs d'ordre n. Nous savons alors qu'il existe une action naturelle de O(3) sur un tel espace. Si nous prenons par exemple un tenseur T d'ordre 4 et g un élément de O(3), en utilisant les notations d'Einstein on pourra noter

$$(g \cdot \mathrm{T})_{ijkl} = g_{ii_1} g_{ji_2} g_{ki_3} g_{li_4} \mathrm{T}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

Maintenant, désignons par V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et G un groupe de Lie compact agissant sur V. Si nous fixons une base de V on définit un *polynôme sur* V comme étant un polynôme multivarié dépendant des coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On notera alors un tel polynôme $p(\mathbf{v}) := p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et on désignera par $\mathbb{C}[V]$ l'algèbre des polynômes (multivariés) sur V. Nous pouvons alors en déduire une action naturelle de G sur $\mathbb{C}[V]$: $(g \cdot p)(\mathbf{v}) := p(g^{-1} \cdot \mathbf{v})$. Finalement, on notera $\mathbb{C}[V]^G$ l'espace des polynômes G-invariants sur V : un tel polynôme vérifiera $g \cdot p = p$ pour tout élément g de G. Rappelons ici l'exemple classique des tenseurs d'ordre 2 de trace nulle, noté $\mathbb{H}^2$, sur lequel agit SO(3). On sait alors que sur cet espace de dimension 5, un tenseur A a pour invariants toutes les traces $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^k)$. En fait, on sait aussi que seules les polynômes $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^3)$ suffisent. Comme précisé plus haut, Hilbert [5] a démontré dans certains cas assez généraux qu'il existera toujours une famille finie de polynômes invariants $p_1, \cdots, p_N$ qui engendre l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$; ce qui s'écrira $\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[p_1, \cdots, p_N]$. Cependant, ce résultat théorique ne donne pas d'algorithme effectif pour déterminer cette base. Il est donc nécessaire de s'appuyer sur quelques connaissances théoriques concernant l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$.

Afin de comprendre les idées essentielles qui permettent de décrire une telle algèbre, prenons tout d'abord l'exemple de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x, y]$. Une telle algèbre est facile à décrire : en effet, chaque élément pourra se décomposer en une somme directe d'éléments dits homogènes :

$$p(x, y) = a_0 + \underbrace{a_1 x + a_2 y}_{\text{degré 1}} + \underbrace{a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2}_{\text{degré 2}} + \cdots$$

et nous parlerons alors dans ce cas d'*algèbre graduée*. Théoriquement, cela signifie qu'on peut écrire une décomposition du type $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots$, où chaque $\mathcal{A}_i$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. Si nous considérons alors une algèbre engendrée par des *variables libres* $x_1, x_2, \cdots, x_n$, on pourra facilement déterminer la dimension de chaque espace homogène $\mathcal{A}_i$: vient alors naturellement la série dite de Hilbert associée à l'algèbre graduée $\mathcal{A}$:

$$H_{\mathcal{A}}(z) := \sum_i dim(\mathcal{A}_i) z^i$$

Ainsi pour le cas de l'algèbre $\mathbb{C}[x, y]$ on aura

$$H(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Dans le cas d'une algèbre d'invariants telle que $\mathbb{C}[V]^G$, la situation est plus problématique. En effet les variables risquent de ne plus être libres. Ainsi, dans l'algèbre $\mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$ on pourra remarquer qu'il

1. Les espaces $\mathbb{H}^n$ sont irréductibles sous l'action des groupes SO(3) et O(3). Ces espaces sont de dimension $2n+1$ est contiennent les tenseurs complètement symétriques et de trace nulle, également appelés tenseurs harmoniques. On retrouve l'espace des scalaires ($n = 0$), des vecteurs ($n = 1$), des déviateurs ($n = 2$).

existe une relation entre les générateurs : $(xy)^2 = x^2 \times y^2$. Il est toutefois possible de calculer sa série de Hilbert, ce qui donne :

$$H(z) = \frac{1 + z^2}{(1 - z^2)^2}$$

Notons ici qu'il existe un premier résultat important concernant la théorie des invariants : en effet, dans le cas des groupes O(3) ou bien SO(3), il est possible de calculer explicitement la série de Hilbert associée. Cela nous permet d'obtenir une première série d'informations importantes sur l'algèbre considérée. Insistons cependant sur le fait que ces informations sont loin d'être suffisantes. En effet, l'une des difficultés associée à la série de Hilbert obtenue est que son écriture ne sera pas unique. On pourra par exemple écrire :

$$\frac{1 + z^2}{(1 - z^2)^2} = \frac{1 + 2z^2 + z^4}{(1 - z^2)(1 - z^4)} = \frac{1 - z^4}{(1 - z^2)^3}$$

Il y a toutefois un autre résultat très important, dû a Hochster and Roberts [3]. Ce résultat concerne la structure algébrique de l'anneau des invariants : en effet, un tel anneau aura une structure dite structure de *Cohen-Macaulay*. Dans la pratique, cela signifie qu'il existe une base de Hilbert qui aura deux types d'invariant : des invariants dits primaires et d'autres invariants dits secondaires. Les invariants primaires sont, entre autre, des invariants libres (il n'existe aucune relation entre eux), mais cette caractéristique n'est pas suffisante, ce qui rend d'ailleurs leur détermination délicate. Les invariants secondaires sont quant à eux liés par certaines relations, mais là encore cette caractéristique n'est pas suffisante. Prenons par exemple le cas de l'algèbre suivante : $\mathcal{B} = \mathbb{C}[I_2, I_4, J_4] \subset \mathbb{C}[x, y]$ avec

$$I_2 = x^2 + y^2 \ ; \ I_4 = x^2y^2 \ ; \ J_4 = xy^3 - x^3y$$

On peut alors démontrer qu'on a dans ce cas

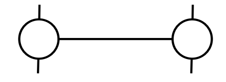
$$\mathcal{B} = \mathbb{C}[I_2, I_4] \oplus J_4\mathbb{C}[I_2, I_4]$$

où la famille I_2, I_4 forme la famille des invariants primaires, et $1, J_4$ forme la famille des invariants secondaires. Remarquons ici la somme directe : cette propriété, difficile à établir en pratique, caractérise en effet les familles de Cohen-Macaulay. Nous concluons donc cette première partie en proposant la stratégie générale suivante, cette stratégie ayant été mise au point pour déterminer une base de Hilbert des espaces $\mathbb{H}^3$ puis $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$.

1. On commence par calculer la série de Hilbert associée à notre algèbre d'invariants ;
2. On cherche à déterminer ensuite la famille des invariants dits primaires, au sens de Cohen-Macaulay. Cela suppose que la famille doit être non seulement libre, mais doit aussi vérifier une propriété supplémentaire (par exemple de décomposition en somme directe). Comme souligné plus haut, ce point peut être très délicat sur le plan pratique ;
3. Une fois déterminée la famille d'invariants primaires, on peut effectuer des calculs de dimensions (sur des espaces de très grande dimension) jusqu'à un certain ordre, calculs dont les résultats seront contrôlés par la série de Hilbert, pour pouvoir conclure ensuite.

4 Application a des espaces de tenseurs

Nous allons ici considérer les cas de la représentation linéaire de O(3) sur les espaces de tenseurs harmoniques $\mathbb{H}^3$ puis $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$. Pour tout espace de tenseurs, nous savons générer facilement des polynômes O(3)-invariants : il suffit pour cela de considérer des opérations de traces. Nous emploierons ici une forme graphique pour représenter ces opérations de trace. Prenons par exemple un tenseur D du troisième ordre, totalement symétrique. En utilisant la notation d'Einstein pour les indices répétés, on peut considérer le tenseur contracté $T_{ijkl} = D_{iji_1}D_{kli_1}$ qui sera représenté par le graphique :



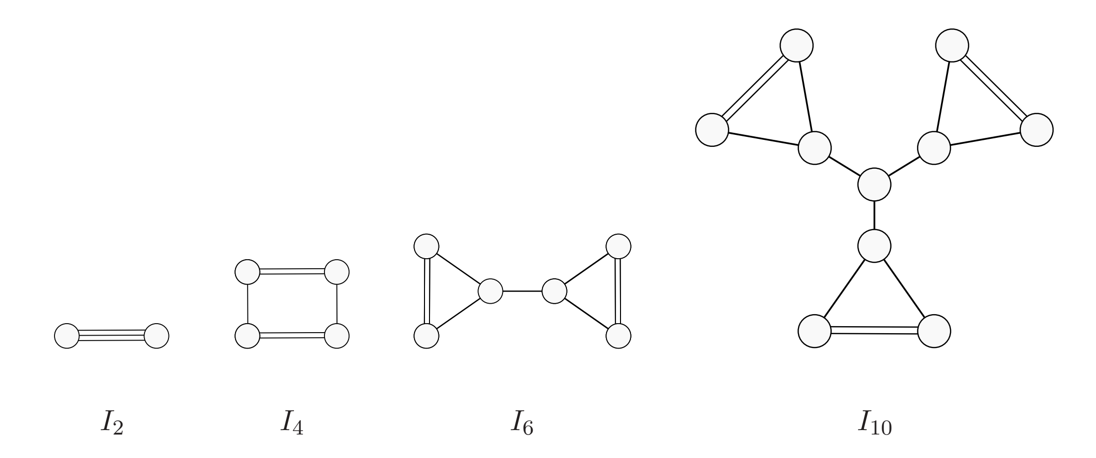
Si nous considérons alors l'invariant $\lambda = D_{ijk}D_{ijk}$, on peut lui attribuer la représentation graphique suivante

Maintenant, il est possible de calculer la série de Hilbert de l'espace $\mathbb{C}[V]^G$ avec $V = \mathbb{H}^3$ et $G = \mathrm{O}(3)$, ce qui donne

$$H_1(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^{10})}$$

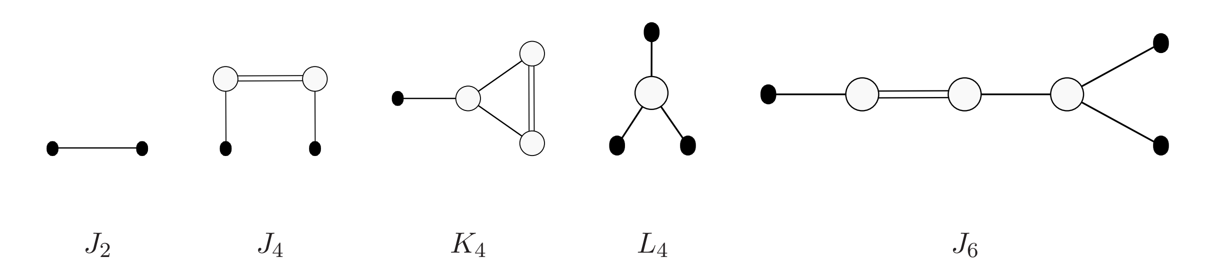
Nous obtenons alors très simplement le premier résultat suivant :

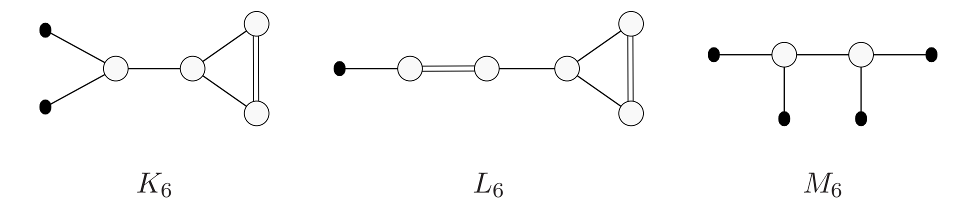
Théorème 4.1 *Une base de Hilbert de* $\mathbb{C}[\mathbb{H}^3]^{\mathrm{O}(3)}$ *est donnée par* I_2, I_4, I_6 *et* I_{10}



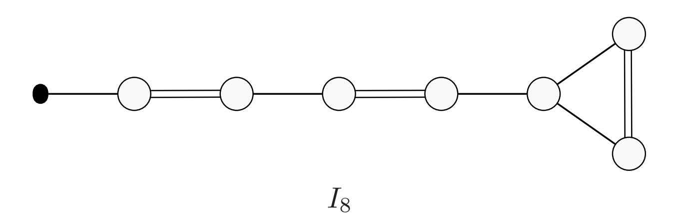
Lorsque nous considérons l'espace $V = \mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$, la série de Hilbert associée est loin d'être aussi simple que celle de $\mathbb{H}^3$. En suivant la stratégie décrite ci-dessus, et en exploitant, ainsi que l'ont fait Boehler et al [1], un isomorphisme entre V et un certain espace de formes binaires, nous avons pu obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.2 *Une base de Hilbert de* $\mathbb{C}[\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1]^{\mathrm{O}(3)}$ *est donné par les 13 polynômes invariants* I_2, J_2, I_4, J_4, K_4, L_4, I_6, J_6, K_6, L_6, M_6, I_8 *et* I_{10}





K_6 L_6 M_6



I_8

5 Conclusions

L'objectif de cette présentation était de donner à la fois le cadre mathématique intervenant dans des questions de calculs d'invariants polynomiaux, mais aussi une stratégie mathématique permettant d'obtenir une base de Hilbert explicite. Cette stratégie a ainsi été mise en œuvre dans deux cas d'espaces tensoriels ayant un sens physique. Nous avons aussi tenté de préciser quelles étaient les difficultés essentielles rencontrées dans la détermination d'une telle base de Hilbert. L'un des points essentiels était de préciser les connaissances théoriques connues *a priori* sur l'algèbre des invariants, à savoir, celle concernant la série de Hilbert et celle concernant la structure de Cohen-Macaulay - cette dernière structure permettant de considérer une famille d'invariants dits primaires et une autre famille d'invariants dits secondaires.

Références

[1] Boehler J.-P., Kirillov Jr. A.A., Onat E.T., On the polynomial invariants of the elasticity tensor. *J. Elasticity, 34, 97–110, 1994*

[2] Gordan P., Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Funktion mit numerischen Coeffizienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. *J. Reine Angew. Math., 69, 323–354, 1868*

[5] Hilbert D., Ueber die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann., 36, 473–534, 1890*

[3] Hochster M., Roberts J.L., Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Adv. Math., 13, 115–175, 1974*

[8] dell'Isola F., Sciarra G. Vidoli S., Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials. *Proc. R. Soc. A, 465, 2177–2196, 2009*

[4] Brouwer A.E., Popoviciu M., The invariants of the binary decimic. *J. Symbolic Comput., 45, 837–843, 2010*

[7] Mindlin R.D., Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal., 16, 51–78, 1964*

[6] Shioda T., On the graded ring of invariants of binary octavics. *Amer. J. Math., 89, 1022–1046, 1967*